1. Riemannův integrál funkcí více proměnných

V tomto oddílu si přiblížíme pojem vícerozměrného integrálu. Zvolený způsob výkladu je veden snahou omezit počet nových pojmů na minimum a vyhnout se tak některým termínům z teorie míry a integrálu, které jsou sice standardní nicméně obtížnější k porozumění. Ucelený úvod o teorii integrace musí čtenář hledat v jiných textech, např. v krásné knize W. Rudina *Analýza v reálném a komplexním oboru* (Academia 2003).

Náš přístup by měl umožnit čtenářům porozumět některým matematickým nástrojům, které se používají v předmětu *Pravděpodobnost a matematická statistika.*

Definice. Řekneme, že $A \subset \mathbb{R}^n$ je *buňka*, jestliže

$$A = \langle a_1, b_1\rangle \times \langle a_2, b_2\rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n\rangle,$$

přičemž $-\infty < a_i < b_i < +\infty$, $i = 1, \dots, n$.

Objem buňky A budeme značit symbolem $\operatorname{vol} A$ a definujeme jej jako

$$\operatorname{vol} A = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Buňkou v $\mathbb{R}$ je tedy libovolný uzavřený interval s neprázdným vnitřkem, v $\mathbb{R}^2$ jde o uzavřený obdélník, jehož strany jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami, v $\mathbb{R}^3$ potom o kvádr s hranami, které jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami.

Definice. Nechť $I = \langle a, b\rangle$, $a < b$. Řekneme, že posloupnost intervalů $\{\langle x_{j-1}, x_j\rangle\}_{j=1}^{k}$ je *dělením intervalu* I, jestliže $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$. [1] Nechť $A = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$ je buňka. Řekneme, že systém $\mathcal{D}$ složený z buněk je dělením buňky A, jestliže

$$\mathcal{D} = \{J_1 \times \cdots \times J_n;\ J_1 \in \mathcal{D}_1, \dots, J_n \in \mathcal{D}_n\},$$

kde $\mathcal{D}_j$ je dělením intervalu I_j, $j = 1, \dots, n$.

Všimněme si, že $A = \bigcup_{D \in \mathcal{D}} D$, přičemž $\operatorname{Int}(D_1 \cap D_2) = \emptyset$ pro libovolné dvě různé buňky $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$.

Definice. Nechť A je buňka a $\mathcal{D}, \mathcal{D}_0$ jsou dvě dělení buňky A. Řekneme, že dělení $\mathcal{D}$ je *zjemněním dělení* $\mathcal{D}_0$, jestliže každá buňka dělení $\mathcal{D}$ je obsažena v nějaké buňce dělení $\mathcal{D}_0$. *Normou dělení* $\mathcal{D}$ rozumíme číslo

$$\nu(\mathcal{D}) = \max_{D \in \mathcal{D}} \{ \sup_{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D} \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \}.$$

1.1. Zavedení vícerozměrného Riemannova integrálu.

1.1.1. *Integrace funkce přes buňku.* Nechť nejprve $A \subset \mathbb{R}^n$ je buňka a f je funkce definovaná alespoň na A, kde je omezená. Definujme horní a dolní Darbouxovy součty a horní a dolní integrál podobně jako v Kapitole 8.2 ($\mathcal{D}$ je systém buněk v A):

$$\overline{S}(f, \mathcal{D}) = \sum_{D \in \mathcal{D}} \sup_D f \cdot \operatorname{vol} D,$$

$$\underline{S}(f, \mathcal{D}) = \sum_{D \in \mathcal{D}} \inf_D f \cdot \operatorname{vol} D,$$

$$\overline{\int_A} f = \inf\{\overline{S}(f, \mathcal{D});\ \mathcal{D} \text{ je dělení } A\},$$

$$\underline{\int_A} f = \sup\{\underline{S}(f, \mathcal{D});\ \mathcal{D} \text{ je dělení } A\}.$$

V případě, že $\overline{\int_A} f = \underline{\int_A} f$, definujeme Riemannův integrál funkce f přes buňku A jako $\int_A f = \underline{\int_A} f$. Někdy používáme také symbol $\int_A f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$, kde je vyznačena proměnná funkce f.

[1] Tato definice formálně nesouhlasí s definicí na straně 252 skript *Matematika.* Je třeba sjednotit.

Poznámka. Pro $n = 1$ je tato definice totožná s definicí Riemannova integrálu v kapitole 8.2. Z tohoto důvodu užíváme často značení $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ místo $\int_{\langle a,b\rangle} f$.

Poznámka. Geometrický význam hodnoty $\int_A f$, kde $A \subset \mathbb{R}^2$, je analogický geometrickému významu Riemannova integrálu funkce jedné reálné proměnné. Číslo $\int_A f$ udává „objem“ tělesa pod grafem funkce f. Slovo objem zde používáme jen pro neformální přiblížení zavedeného pojmu. Jeho přesné zavedení zde provést nemůžeme.

Nechť A je buňka a funkce f je omezená na A. Podobně jako v případě $n = 1$ si lze snadno rozmyslet, že horní a dolní integrály funkce f přes buňku A jsou vždy dobře definovány a že pokud $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ jsou dvě dělení buňky A a $\mathcal{D}$ je dělení buňky A zjemňující $\mathcal{D}_1$ i $\mathcal{D}_2$, pak

$$\underline{S}(f,\mathcal{D}_1) \leq \underline{S}(f,\mathcal{D}) \leq \overline{S}(f,\mathcal{D}) \leq \overline{S}(f,\mathcal{D}_2).$$

Odtud lze snadno odvodit $\underline{\int_A} f \leq \overline{\int_A} f$.

Lemma 1. *Nechť f je funkce omezená na buňce $A \subset \mathbb{R}^n$.*
(a) $\int_A f = I \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ existuje dělení $\mathcal{D}$ buňky A takové, že

$$I - \varepsilon < \underline{S}(f,\mathcal{D}) \leq \overline{S}(f,\mathcal{D}) < I + \varepsilon. \tag{1}$$

(b) Funkce f má na buňce A Riemannův integrál právě tehdy, když ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ existuje dělení $\mathcal{D}$ buňky A takové, že

$$\overline{S}(f,\mathcal{D}) - \underline{S}(f,\mathcal{D}) < \varepsilon. \tag{2}$$

Důkaz. (a)„$\Rightarrow$“: Zvolme $\varepsilon > 0$. Protože $\overline{\int_A} f = I$, existuje dělení $\mathcal{D}_1$ buňky A takové, že $\overline{S}(f,\mathcal{D}_1) < I + \varepsilon$, a protože $\underline{\int_A} f = I$, existuje dělení $\mathcal{D}_2$ buňky A takové, že $\underline{S}(f,\mathcal{D}_2) > I - \varepsilon$. Nechť dělení $\mathcal{D}$ buňky A zjemňuje $\mathcal{D}_1$ i $\mathcal{D}_2$. Pak

$$I - \varepsilon < \underline{S}(f,\mathcal{D}_2) \leq \underline{S}(f,\mathcal{D}) \leq \overline{S}(f,\mathcal{D}) \leq \overline{S}(f,\mathcal{D}_1) < I + \varepsilon.$$

(a)„$\Leftarrow$“: Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Nechť dělení $\mathcal{D}$ buňky A splňuje (1). Pak

$$I - \varepsilon < \underline{S}(f,\mathcal{D}) \leq \underline{\int_A} f \leq \overline{\int_A} f \leq \overline{S}(f,\mathcal{D}) < I + \varepsilon.$$

Protože toto platí pro každé $\varepsilon > 0$, musí být $\underline{\int_A} f = \overline{\int_A} f = I$.

(b)„$\Rightarrow$“: Plyne z (a).

(b)„$\Leftarrow$“: Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Nechť dělení $\mathcal{D}$ buňky A splňuje (2). Pak

$$0 \leq \overline{\int_A} f - \underline{\int_A} f \leq \overline{S}(f,\mathcal{D}) - \underline{S}(f,\mathcal{D}) < \varepsilon.$$

Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, musí platit $\underline{\int_A} f = \overline{\int_A} f$.

□

Tvrzení 2. *Nechť f je funkce omezená na buňce $A \subset \mathbb{R}^n$ a nechť $\mathcal{D}$ je dělení buňky A. Jestliže pro každé $D \in \mathcal{D}$ existuje $\int_D f$, pak existuje i $\int_A f$ a platí*

$$\int_A f = \sum_{D \in \mathcal{D}} \int_D f.$$

Důkaz. Myšlenka důkazu je stejná jako v případě $n = 1$, pouze formální zápis je technicky náročnější.

□

Důsledek 3. *Nechť $A, B \subset \mathbb{R}^n$ jsou buňky, $A \subset B$. Nechť f je funkce definovaná alespoň na B, pro kterou platí $f(\boldsymbol{x}) = 0$ pokud $\boldsymbol{x} \in B \setminus A$. Potom jestliže existuje $\int_A f$, pak existuje i $\int_B f$ a oba integrály se rovnají.*

1.1.2. *Integrace funkce přes množinu.* Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ a f je funkce n proměnných, která je definována alespoň na M a je na M omezená. Definujme funkci $\tilde{f} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ takto:

$$\tilde{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} f(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{x} \in M, \\ 0 & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus M. \end{cases}$$

Riemannův integrál $\int_M f$ definujeme jako

$$\int_M f = \lim_{r \to +\infty} \int_{\langle -r,r \rangle^n} \tilde{f},$$

pokud uvedená limita existuje. (Především tedy musí existovat $\int_{\langle -r,r\rangle^n} \tilde{f}$ pro všechna $r \in (0, +\infty)$.)

Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je buňka a f je funkce definovaná alespoň na A. Nyní máme integrál $\int_A f$ definován dvěma různými způsoby—jednak předchozí definicí a jednak definicí v odstavci 1.1.1. Aby tedy byly obě definice korektní, musíme ukázat, že se integrály zavedené těmito dvěma různými způsoby neliší. To však není obtížné: Existuje $R \in (0, +\infty)$ takové, že $A \subset \langle -R, R\rangle^n$. Podle Důsledku 3 je ovšem $\int_{\langle -r,r\rangle^n} \tilde{f} = \int_A f$ pro všechna $r \geq R$, a tedy obě definice souhlasí.

Poznámka. Nechť $M \subset R^n$ je omezená množina. Pokud existuje $\int_M f$, pak podle Důsledku 3 $\int_M f = \int_{\langle -R,R\rangle^n} \tilde{f}$ pro dostatečně velké $R \in \mathbb{R}$ a $\int_M f$ je konečný.

Pokud integrál funkce f přes množinu $M \subset \mathbb{R}^n$ existuje a přitom je konečný, pak říkáme, že $\int_M f$ *konverguje.* Pokud je roven $+\infty$ nebo $-\infty$, pak říkáme, že *diverguje.* Máme pak následující schéma:

$$\int_M f \begin{cases} \text{existuje a je roven} \begin{cases} \text{reálnému číslu, tj. konverguje;} \\ +\infty, \text{ tj. diverguje;} \\ -\infty, \text{ tj. diverguje;} \end{cases} \\ \text{neexistuje.} \end{cases}$$

Příklad. Spočtěme $\int_{(-\infty,+\infty)} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Pro $r \in \mathbb{R}$ máme

$$\int_{\langle -r,r\rangle} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-r}^{r} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = [\operatorname{arctg} x]_{-r}^{r} = 2 \operatorname{arctg} r.$$

Uvedený integrál je Riemannův, jak ho známe z Kapitoly 8.2, a zde ho můžeme vypočítat pomocí primitivní funkce. Potom snadno dopočteme

$$\int_{(-\infty,+\infty)} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{r \to +\infty} 2 \operatorname{arctg} r = \pi.$$

1.2. **Základní vlastnosti vícerozměrného Riemannova integrálu.** V následujících tvrzeních budeme používat uspořádání a aritmetiku na rozšířené reálné ose, tak, jak jsme ji zavedli v kapitole 2.5.

Věta 4. *Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a f a g jsou funkce n proměnných takové, že integrály $\int_M f$ a $\int_M g$ existují. Potom*

(i) $\int_M (f+g)$ existuje a platí

$$\int_M (f+g) = \int_M f + \int_M g,$$

pokud má výraz na pravé straně rovnosti smysl.

(ii) $\int_M \alpha f$ existuje a platí

$$\int_M \alpha f = \alpha \int_M f.$$

Důkaz. Pro integrály přes buňku je důkaz shodný s důkazem pro případ $n = 1$. Pro obecnou množinu pak tvrzení plyne z věty o aritmetice limit.

□

Věta 5. *Nechť $M, N \subset \mathbb{R}^n$, $M \cap N = \emptyset$ a f je funkce n proměnných taková, že integrály $\int_M f$ a $\int_N f$ existují. Potom existuje i integrál $\int_{M\cup N} f$ a platí*

$$\int_{M\cup N} f = \int_M f + \int_N f,$$

pokud má výraz na pravé straně rovnosti smysl.

Důkaz. Označme $f_1 = f|_M$, $f_2 = f|_N$ a $f_0 = f|_{M\cup N}$. Nyní si stačí uvědomit, že $\tilde{f}_0 = \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2$. Pomocí Věty 4 tedy dostáváme

$$\int_{M\cup N} f = \int_{M\cup N} \tilde{f}_0 = \int_{M\cup N} \tilde{f}_1 + \int_{M\cup N} \tilde{f}_2 = \int_M f + \int_N f.$$

□

Věta 6. *Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ a f a g jsou funkce n proměnných takové, že integrály $\int_M f$ a $\int_M g$ existují.*
(i) Je-li $f \geq 0$, potom i $\int_M f \geq 0$.
(ii) Je-li $f \leq g$, potom i $\int_M f \leq \int_M g$.
(iii) $\int_M |f|$ existuje a platí

$$\left|\int_M f\right| \leq \int_M |f|\,. \tag{3}$$

Důkaz. (i) Pro integrál přes buňku toto tvrzení plyne přímo z definice, pro integrál přes obecnou množinu pak pomocí věty o srovnání limit.

(ii) Je-li $\int_M g = +\infty$, případně $\int_M g = \int_M f = -\infty$, pak tvrzení evidentně platí. Ostatní případy plynou z tvrzení (i) pomocí Věty 4.

(iii) Nechť $r \in (0, +\infty)$. Protože existuje $\int_{\langle -r,r\rangle^n} \tilde{f}$, existuje i integrál $\int_{\langle -r,r\rangle^n} |\tilde{f}|$. (Důkaz je stejný jako v případě $n = 1$.) Je-li $0 < r_1 < r_2 < +\infty$, platí podle (ii), že $\int_{\langle -r_1,r_1\rangle^n} |\tilde{f}| \leq \int_{\langle -r_2,r_2\rangle^n} |\tilde{f}|$. Funkce $r \mapsto \int_{\langle -r,r\rangle^n} |\tilde{f}|$ je tedy neklesající a má proto limitu pro $r \to +\infty$. To ovšem znamená, že integrál $\int_M |f|$ existuje. Nerovnost (3) je pak důsledkem tvrzení (ii) a Věty 4.

□

1.3. **Hlubší věty o vícerozměrném Riemannově integrálu.** Pro které množiny M a funkce f existuje integrál $\int_M f$, není snadná otázka. Následující věta udává postačující podmínky existence či konvergence integrálu. Množina těch M a f, které je splňují, není příliš široká, základní situace jsou však pokryty.

Věta 7.

(i) Nechť $K \subset \mathbb{R}^n$ je omezená konvexní množina a f je omezená funkce na K, která je spojitá ve všech bodech K (vzhledem ke K) vyjma nejvýše konečně mnoha bodů z K. Potom $\int_K f$ konverguje.

(ii) Nechť $K \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní množina a f je omezená nezáporná funkce na K, která je spojitá ve všech bodech K (vzhledem ke K) vyjma nejvýše konečně mnoha bodů z K. Potom $\int_K f$ existuje.

Základní strategie důkazu této věty bude následující: Obklopíme K nějakou buňkou A. Nechť $\mathcal{D}$ je dělení A. Buňky v $\mathcal{D}$ si rozdělíme na tři skupiny—buňky disjunktní s K, buňky ležící v K a buňky mající společný bod s K i s doplňkem K. Na buňkách první skupiny je $\tilde{f} = 0$, tedy tyto buňky nijak nepřispívají do součtu $\overline{S}(\tilde{f}, \mathcal{D})$ ani do součtu $\underline{S}(\tilde{f}, \mathcal{D})$. Na buňkách druhé skupiny je funkce f stejnoměrně spojitá, pokud tedy bude norma dělení dostatečně malá, nebude ani rozdíl horního a dolního součtu přes tyto buňky příliš veliký. Konečně buňky třetí skupiny jsou ty buňky, které pokrývají hranici K. Ukážeme-li, že celkový objem těchto buněk je velmi malý v porovnání s objemem A, pak příspěvek těchto „hraničních“ buněk příliš neovlivní ani rozdíl $\overline{S}(f,\mathcal{D}) - \underline{S}(f,\mathcal{D})$.

Hlavní tíha důkazu bude tedy spočívat na následujícím lemmatu:

Lemma 8. *Nechť $K \subset \mathbb{R}^n$ je omezená konvexní množina, $A \subset \mathbb{R}^n$ je buňka, $K \subset A$ a nechť $\eta > 0$ a $\varepsilon > 0$. Potom existuje dělení $\mathcal{D}$ buňky A takové, že $\max_{D\in\mathcal{D}} \operatorname{vol} D < \eta$ a*

$$\sum_{D\in\mathcal{Q}} \operatorname{vol} D < \varepsilon,$$

kde $\mathcal{Q} = \{D \in \mathcal{D};\ D \cap K \neq \emptyset, D \cap (A \setminus K) \neq \emptyset\}$.

Důkaz Věty 7. (i) Nechť $\boldsymbol{z}_1, \dots, \boldsymbol{z}_k \in K$ jsou body nespojitosti funkce f na K. Nechť dále $A \subset \mathbb{R}^n$ je nějaká buňka pro kterou platí $K \subset A$ a nechť $\varepsilon > 0$. Protože f je omezená na K, existuje $M \in \mathbb{R}$ takové, že $|f| \leq M$ na K.

Podle Lemmatu 8 existuje dělení $\mathcal{D}_0$ buňky A takové, že $\max_{D\in\mathcal{D}_0} \operatorname{vol} D < \varepsilon/(6Mk2^n)$ a dále $\sum_{D\in\mathcal{Q}_0^3} \operatorname{vol} D < \varepsilon/(6M)$, kde $\mathcal{Q}_0^3 = \{D \in \mathcal{D}_0;\ D \cap K \neq \emptyset, D \cap (A \setminus K) \neq \emptyset\}$. Označme

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_0^1 &= \{D \in \mathcal{D}_0;\ D \cap K = \emptyset\},\\
\mathcal{Q}_0^2 &= \{D \in \mathcal{D}_0;\ D \subset K, \boldsymbol{z}_1 \notin D, \dots, \boldsymbol{z}_k \notin D\},\\
\mathcal{Q}_0^4 &= \{D \in \mathcal{D}_0;\ D \subset K, \boldsymbol{z}_i \in D \text{ pro nějaké } i \in \{1,\dots,k\}\}.
\end{aligned}$$

Všimněme si, že platí $\mathcal{D}_0 = \mathcal{Q}_0^1 \cup \mathcal{Q}_0^2 \cup \mathcal{Q}_0^3 \cup \mathcal{Q}_0^4$.

Množina $V = \bigcup_{D\in\mathcal{Q}_0^2} D$ je omezená a uzavřená, tedy kompaktní. Funkce f je tedy na V stejnoměrně spojitá (důkaz je stejný jako spojitou funkci jedné proměnné na omezeném uzavřeném intervalu), čili existuje $\delta > 0$ takové, že $|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| < \varepsilon/(3 \operatorname{vol} A)$ kdykoli $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ splňují $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) < \delta$.

Nechť nyní $\mathcal{D}$ je zjemnění $\mathcal{D}_0$ takové, že $\nu(\mathcal{D}) < \delta$. Pro $i \in \{1,2,3,4\}$ označme

$$\mathcal{Q}^i = \{D \in \mathcal{D};\ D \subset D_0 \text{ pro nějaké } D_0 \in \mathcal{Q}_0^i\}.$$

Všimněme si, že opět platí $\mathcal{D} = \mathcal{Q}^1 \cup \mathcal{Q}^2 \cup \mathcal{Q}^3 \cup \mathcal{Q}^4$. Potom

$$\begin{aligned}
\overline{S}(\tilde{f},\mathcal{D}) &= \overline{S}(\tilde{f},\mathcal{Q}^1) + \overline{S}(\tilde{f},\mathcal{Q}^2) + \overline{S}(\tilde{f},\mathcal{Q}^3) + \overline{S}(\tilde{f},\mathcal{Q}^4) = \overline{S}(f,\mathcal{Q}^2) + \overline{S}(\tilde{f},\mathcal{Q}^3) + \overline{S}(f,\mathcal{Q}^4)\\
&\leq \overline{S}(f,\mathcal{Q}^2) + M \sum_{D\in\mathcal{Q}^3} \operatorname{vol} D + M \sum_{D\in\mathcal{Q}^4} \operatorname{vol} D\\
&= \overline{S}(f,\mathcal{Q}^2) + M \sum_{Q\in\mathcal{Q}_0^3} \operatorname{vol} Q + M \sum_{Q\in\mathcal{Q}_0^4} \sum_{\substack{D\in\mathcal{D}\\ D\subset Q}} \operatorname{vol} D\\
&< \overline{S}(f,\mathcal{Q}^2) + \frac{\varepsilon}{6} + Mk2^n \max_{Q\in\mathcal{D}_0} \operatorname{vol} Q \leq \overline{S}(f,\mathcal{Q}^2) + \frac{\varepsilon}{3}.
\end{aligned}$$

Stejným způsobem zjistíme, že $\underline{S}(\tilde{f},\mathcal{D}) > \underline{S}(f,\mathcal{Q}^2) - \frac{\varepsilon}{3}$.

Dohromady tedy máme

$$\overline{S}(\tilde{f},\mathcal{D}) - \underline{S}(\tilde{f},\mathcal{D}) < \overline{S}(f,\mathcal{Q}^2) - \underline{S}(f,\mathcal{Q}^2) + \frac{2\varepsilon}{3} \leq \frac{\varepsilon}{3 \operatorname{vol} A} \operatorname{vol} A + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

kde druhá z nerovností plyne z toho, že $\nu(\mathcal{D}) < \delta$. Podle Lemmatu 1(ii) tedy existuje $\int_A \tilde{f}$ (a je to konečné číslo, ježto je to integrál přes buňku) a tím pádem $\int_K f$ konverguje.

(ii) Podle tvrzení (i) existuje $\int_{K\cap\langle -r,r\rangle^n} f = \int_{\langle -r,r\rangle^n} \tilde{f}$ pro každé $r \in (0,+\infty)$. Protože funkce $\tilde{f}$ je nezáporná, platí podle Tvrzení 2 a Věty 6 $\int_{\langle -r_1,r_1\rangle^n} \tilde{f} \leq \int_{\langle -r_2,r_2\rangle^n} \tilde{f}$ kdykoli $0 < r_1 < r_2 < +\infty$. Funkce $r \mapsto \int_{\langle -r,r\rangle^n} \tilde{f}$ je tedy neklesající a má proto limitu pro $r \to +\infty$.

□

Důkaz Lemmatu 8 si rozložíme do několika dalších pomocných tvrzení.

Lemma 9. *Nechť $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ a $C \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní množina, která protíná každou množinu tvaru*

$$O_1 \times \cdots \times O_n,$$

kde $O_i = \langle a_i, +\infty)$ nebo $O_i = (-\infty, a_i\rangle$. Pak C obsahuje bod $\boldsymbol{a}$.

Důkaz. Tvrzení dokážeme indukcí dle dimenze n. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$.

Nechť tedy nejprve $n = 1$. Pak existují body $u \in (-\infty, 0\rangle \cap C$ a $v \in \langle 0, +\infty) \cap C$. Je-li $u = v$, pak $u = v = 0 \in C$. Jinak platí $0 = \lambda u + (1 - \lambda)v$, kde $\lambda = \frac{v}{v-u} \in \langle 0, 1\rangle$, a tedy $0 \in C$.

Nyní předpokládejme, že tvrzení platí v dimenzi $n \in \mathbb{N}$ a dokažme, že pak platí i v dimenzi $n + 1$. Máme tedy množinu $C \in \mathbb{R}^{n+1}$ splňující předpoklady. Uvažujme množinu $C' = C \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^n)$. Tato množina je konvexní (je průnikem konvexních množin) a můžeme ji chápat také jako podmnožinu $\mathbb{R}^n$. Nechť $O_1 \times \cdots \times O_n \subset \mathbb{R}^n$ je nějaká množina, kde každý z činitelů O_i je tvaru $(-\infty, 0\rangle$ nebo $\langle 0, +\infty)$. Podle předpokladů existují body $\boldsymbol{u} \in ((-\infty, 0\rangle \times O_1 \times \cdots \times O_n) \cap C$ a $\boldsymbol{v} \in (\langle 0, +\infty) \times O_1 \times \cdots \times O_n) \cap C$. Položme $\boldsymbol{w} = \lambda \boldsymbol{u} + (1 - \lambda)\boldsymbol{v}$, kde $\lambda = \frac{v_1}{v_1 - u_1}$ pokud $v_1 \neq u_1$, $\lambda = 0$ jinak. Platí, že $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$, a tedy $\boldsymbol{w} \in C$. Navíc $w_1 = 0$, tedy $\boldsymbol{w} \in C'$. Z toho plyne, že množina C', chápeme-li ji jako podmnožinu $\mathbb{R}^n$, splňuje předpoklady našeho tvrzení v dimenzi n, a tedy podle indukčního předpokladu platí $\boldsymbol{o} \in C'$. To ale znamená, že $\boldsymbol{o} \in C$.

$\square$

Lemma 10. *Nechť $A = I_1 \times \cdots \times I_n$ je buňka a $\mathcal{D}_j$ je dělení intervalu I_j sestávající alespoň ze tří intervalů. Označme*

$$\mathcal{D} = \{J_1 \times \cdots \times J_n;\ J_i \in \mathcal{D}_i,\ i = 1, \ldots, n\}.$$

Pokud konvexní množina $C \subset \mathbb{R}^n$ protíná všechny prvky $\mathcal{D}$, pak alespoň jeden prvek z $\mathcal{D}$ je obsažen v C.

Důkaz. Nechť $H_i \in \mathcal{D}_i$ jsou takové intervaly, které neobsahují krajní body intervalů I_i. Takové intervaly v existují pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$, neboť každé $\mathcal{D}_i$ sestává alespoň ze tří intervalů. Dokážeme, že pak pro buňku $B = H_1 \times \cdots \times H_n$ platí $B \subset C$.

Vezměme libovolné $\boldsymbol{x} \in B$. Nechť $O_i = \langle x_i, +\infty)$ nebo $O_i = (-\infty, x_i\rangle$ pro $i = 1, \ldots, n$. Protože $x_i \in H_i$, plyne z volby intervalů H_i, že každý z intervalů O_i obsahuje nějaký interval z $\mathcal{D}_i$. Existuje tedy nějaká buňka $D \in \mathcal{D}$, pro kterou $D \subset O_1 \times \cdots \times O_n$. Protože C protíná buňku D, protíná také množinu $O_1 \times \cdots \times O_n$. Podle Lemmatu 9 tedy platí $\boldsymbol{x} \in C$.

$\square$

Důkaz Lemmatu 8. Nechť $\mathcal{D}_j$, $j \in \mathbb{N}$, je dělení buňky $A = I_1 \times \cdots \times I_n$, které vznikne rozdělením každého z intervalů $I_1, \ldots, I_n$ na 3^j stejně dlouhých podintervalů. Je-li $j, k \in \mathbb{N}$, $j < k$, pak $\mathcal{D}_k$ je zjevně zjemněním $\mathcal{D}_j$. Pro $Q \in \mathcal{D}_j$ označme $\mathcal{D}_k|_Q = \{D \in \mathcal{D}_k;\ D \subset Q\}$. Pak $\mathcal{D}_k|_Q$ je dělením Q.

Pokud v $\mathcal{D}_1$ existuje buňka ležící mimo K, označme ji C_1^1. Pokud ne, pak podle Lemmatu 10 existuje v $\mathcal{D}_1$ buňka ležící celá v K, označme ji C_1^1. Máme tedy buňku $C_1^1 \in \mathcal{D}_1$, pro kterou platí $C_1^1 \subset K$ nebo $C_1^1 \cap K = \emptyset$.

Nyní stejnou úvahu zopakujeme pro buňky $Q \in \mathcal{D}_1$, $Q \neq C_1^1$, a jejich dělení $\mathcal{D}_2|_Q$. Takových buněk je $3^n - 1$, označme je tedy D_i^1, $i = 1, \ldots, 3^n - 1$. Mezi buňkami $\mathcal{D}_2|_{D_i^1}$ buďto existuje buňka ležící celá mimo K nebo podle Lemmatu 10 mezi nimi existuje buňka ležící celá v K. Označme takovou buňku C_i^2. Máme tedy buňky $C_i^2 \in \mathcal{D}_2$, pro které platí $C_i^2 \subset K$ nebo $C_i^2 \cap K = \emptyset$, $i = 1, \ldots, 3^n - 1$. Navíc $C_i^2 \not\subset C_1^1$.

Dále postupujeme induktivně: Máme-li již nalezeny buňky C_i^k, $i = 1, \ldots, (3^n - 1)^{k-1}$, takové, že $C_i^k \in \mathcal{D}_k$, $C_i^k \not\subset C_l^j$ pro $j < k$, $l = 1, \ldots, (3^n - 1)^{j-1}$, a každá z buněk C_i^k leží buď celá v K nebo celá mimo K, pak pomocí Lemmatu 10 nalezneme buňky C_i^{k+1}, $i = 1, \ldots, (3^n - 1)^k$, takové, že $C_i^{k+1} \in \mathcal{D}_{k+1}$, $C_i^{k+1} \not\subset C_l^j$ pro $j < k + 1$, $l = 1, \ldots, (3^n - 1)^{j-1}$, a každá z buněk C_i^{k+1} leží buď celá v K nebo celá mimo K.

Nechť nyní $k \in \mathbb{N}$. Označme $\mathcal{Q}_k = \{D \in \mathcal{D}_k;\ D \cap K \neq \emptyset, D \cap (A \setminus K) \neq \emptyset\}$. Potom

$$\begin{aligned}
\operatorname{vol} A &= \sum_{D \in \mathcal{D}_k} \operatorname{vol} D = \sum_{D \in \mathcal{Q}_k} \operatorname{vol} D + \sum_{D \in \mathcal{D}_k \setminus \mathcal{Q}_k} \operatorname{vol} D \\
&\geq \sum_{D \in \mathcal{Q}_k} \operatorname{vol} D + \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{(3^n-1)^{j-1}} \operatorname{vol} C_i^j = \sum_{D \in \mathcal{Q}_k} \operatorname{vol} D + \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{(3^n-1)^{j-1}} \frac{\operatorname{vol} A}{(3^n)^j} \\
&= \sum_{D \in \mathcal{Q}_k} \operatorname{vol} D + \operatorname{vol} A \sum_{j=1}^{k} \frac{(3^n-1)^{j-1}}{(3^n)^j} = \sum_{D \in \mathcal{Q}_k} \operatorname{vol} D + \frac{\operatorname{vol} A}{3^n} \sum_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)^{j-1}.
\end{aligned}$$

Máme tedy

$$\sum_{D \in \mathcal{Q}_k} \operatorname{vol} D \leq \operatorname{vol} A \left(1 - \frac{1}{3^n} \sum_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)^{j-1}\right).$$

Protože $\sum_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)^{j-1} = 3^n$, lze nalézt $k \in \mathbb{N}$ dostatečně velké tak, aby platilo

$$\sum_{D \in \mathcal{Q}_k} \operatorname{vol} D < \varepsilon$$

a zároveň $\max_{D \in \mathcal{D}_k} \operatorname{vol} D = \frac{1}{(3^n)^k} < \eta$.

□

Věta 11 (Fubiniova věta)**.**

(i) Nechť $M_1 \subset \mathbb{R}^m$ a $M_2 \subset \mathbb{R}^n$. Předpokládejme dále, že množiny M_1 a M_2 jsou buňky. Nechť f je funkce definovaná alespoň na $M_1 \times M_2$ a nechť existuje $\int_{M_1 \times M_2} f$. Pokud pro každé $\boldsymbol{x} \in M_1$ existuje $F(\boldsymbol{x}) = \int_{M_2} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, \mathrm{d}\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}$, potom platí

$$\int_{M_1 \times M_2} f = \int_{M_1} F(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{4}$$

(ii) Nechť $f\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je nezáporná funkce a nechť existuje $\int_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} f$. Pokud pro každé $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ existuje $F(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, \mathrm{d}\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}$ a pokud existuje $\int_{\mathbb{R}^m} F(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}$, pak platí

$$\int_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} f = \int_{\mathbb{R}^m} F(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Důkaz. (i) Všimněme si, že množina $M_1 \times M_2$ je také buňka. Nechť $\int_{M_1 \times M_2} f = I \in \mathbb{R}$. Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Podle Lemmatu 1(a) existuje dělení $\mathcal{D}$ buňky $M_1 \times M_2$ takové, že $I - \varepsilon < \underline{S}(f, \mathcal{D}) \leq \overline{S}(f, \mathcal{D}) < I + \varepsilon$. Není obtížné si rozmyslet, že $\mathcal{D} = \{D \times O;\ D \in \mathcal{D}_1, O \in \mathcal{D}_2\}$, kde $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ jsou nějaká dělení buněk M_1, M_2. Pro horní součet funkce F při dělení $\mathcal{D}_1$ platí

$$\begin{aligned}
\overline{S}(F, \mathcal{D}_1) &= \sum_{D \in \mathcal{D}_1} \sup_{\boldsymbol{x} \in D} F(\boldsymbol{x}) \cdot \operatorname{vol} D \leq \sum_{D \in \mathcal{D}_1} \sup_{\boldsymbol{x} \in D} \big(\overline{S}(f(\boldsymbol{x}, \cdot), \mathcal{D}_2)\big) \cdot \operatorname{vol} D \\
&= \sum_{D \in \mathcal{D}_1} \sup_{\boldsymbol{x} \in D} \left(\sum_{O \in \mathcal{D}_2} \sup_{\boldsymbol{y} \in O} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \cdot \operatorname{vol} O \right) \cdot \operatorname{vol} D \\
&\leq \sum_{D \in \mathcal{D}_1} \sum_{O \in \mathcal{D}_2} \sup_{\boldsymbol{x} \in D} \left(\sup_{\boldsymbol{y} \in O} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \cdot \operatorname{vol} O \right) \cdot \operatorname{vol} D \\
&= \sum_{D \in \mathcal{D}_1} \sum_{O \in \mathcal{D}_2} \operatorname{vol} D \cdot \operatorname{vol} O \cdot \sup_{\boldsymbol{x} \in D} \left(\sup_{\boldsymbol{y} \in O} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \right) \\
&\leq \sum_{D \in \mathcal{D}_1} \sum_{O \in \mathcal{D}_2} \operatorname{vol}(D \times O) \cdot \sup_{\boldsymbol{z} \in D \times O} f(\boldsymbol{z}) = \overline{S}(f, \mathcal{D}) < I + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Podobně obdržíme nerovnost $\underline{S}(F, \mathcal{D}_1) > I - \varepsilon$. Podle Lemmatu 1(a) tedy platí $\int_{M_1} F = I$.

(ii) Předpokládejme, že $k \in \mathbb{N}$ a $g\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ je nezáporná funkce pro kterou existuje $\int_{\mathbb{R}^k} g$. Nechť $r \in (0, +\infty)$. Podle definice existuje $\int_{\langle -r,r\rangle^k} g$, funkce $g|_{\langle -r,r\rangle^k}$ je tedy měřitelná. Protože g je bodovou limitou funkcí $g|_{\langle -r,r\rangle^k}$, je g nezáporná měřitelná funkce a podle Lebesgueovy věty o monotónní konvergenci platí $(L)\int_{\mathbb{R}^k} g = \lim_{r\to+\infty}(L)\int_{\langle -r,r\rangle^k} g = \lim_{r\to+\infty}\int_{\langle -r,r\rangle^k} g = \int_{\mathbb{R}^k} g$. Tvrzení nyní plyne z Fubiniovy věty pro Lebesgueův integrál.

□

Vysvětleme si smysl Věty 11(i) v situaci, kdy $m = n = 1$. Potom jsou buňky M_1 a M_2 uzavřené intervaly s neprázdným vnitřkem. Funkce f je tedy definována na uzavřeném obdélníku $M_1 \times M_2$. Na levé straně (4) je integrál $\int_{M_1\times M_2} f$ a věta říká, že ho můžeme (při splnění uvedených předpokladů) počítat následujícím způsobem. Nejprve pro každé $x \in M_1$ spočteme integrál $\int_{M_2} f(x,y)\,\mathrm{d}y$. V tomto integrálu se vyskytuje x jako parametr, výsledek bude tedy obecně na x záviset. Označme

$$F(x) := \int_{M_2} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Nyní spočteme integrál $\int_{M_1} F(x)\,\mathrm{d}x$ a podle Fubiniovy věty platí $\int_{M_1\times M_2} f = \int_{M_1} F$. Fubiniova věta nám tedy umožňuje vypočítat některé integrály opakovanou integrací funkcí jedné proměnné. Smysl Věty 11(ii) je obdobný.

Poznámka. Fubiniova věta se často píše ve tvaru

$$\int_{M_1\times M_2} f = \int_{M_1}\left(\int_{M_2} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Předpoklad existence integrálu $\int_{M_1\times M_2} f$ (resp. $\int_{\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n} f$) často ověřujeme pomocí existenčních vět (např. Věta 7) a předpoklad konvergence $\int_{M_2} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}$ (resp. $\int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}$), případně existence $\int_{\mathbb{R}^m} F(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$, ověřujeme zpravidla přímo výpočtem.

Ukažme si konkrétní příklady.

Příklad. Nechť $M_1 = M_2 = \langle -1, 1\rangle$ a $f\colon \langle -1,1\rangle \times \langle -1,1\rangle \to \mathbb{R}$ je definována takto:

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2-y^2}, & \text{pokud } 1-x^2-y^2 \geq 0;\\ 0, & \text{jinak.}\end{cases}$$

Zde je graf funkce f.

Spočtěme integrál

$$\int_{\langle -1,1\rangle\times\langle -1,1\rangle} f.$$

Výsledkem bude tedy objem polokoule o poloměru 1.

V průběhu výpočtu se přesvědčíme, že předpoklady Věty11(i) jsou splněny, a následující výpočet bude tedy oprávněný.

$$\begin{aligned}
\int_{M_1\times M_2} f &= \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\
&= \int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\
&= \int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}y\sqrt{1-x^2-y^2} + \frac{1}{2}(1-x^2)\arcsin\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\\
&= \int_{-1}^{1}(1-x^2)\frac{\pi}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\left(x-\frac{1}{3}x^3\right)\frac{\pi}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{2\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Nejprve tedy vypočítáme plochu $F(x)$ řezu určeného x (viz obrázek) a pak integrací $F(x)$ dostaneme výsledek, tj. objem polokoule.

Příklad. Nechť $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \le 1\}$ a $f\colon M \to \mathbb{R}$ je definována jako $f(x,y)=1$ pro $[x,y]\in M$. Spočtěme integrál

$$\int_M f.$$

Výsledkem bude objem válce s podstavou o poloměru 1 a s výškou 1, neboli obsah kruhu o poloměru 1.

Podle definice je

$$\int_M f = \lim_{r\to+\infty} \int_{\langle -r,r\rangle^2} \tilde{f},$$

kde $\tilde{f}=1$ na M a $\tilde{f}=0$ mimo M. Takovéto funkci se říká *charakteristická funkce* množiny M a značí se obvykle χ_M. Položme $M_1 = M_2 = \langle -1,1\rangle$. Je $M \subset M_1 \times M_2$ a tedy podle poznámky za definicí integrálu platí

$$\int_M f = \int_{M_1\times M_2} \chi_M.$$

Podle Věty 7 integrál $\int_M f$ dokonce konverguje, tedy existuje i integrál $\int_{M_1\times M_2}\chi_M$. Platí

$$\int_{M_2} \chi_M(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{M_2} \chi_{\langle -\sqrt{1-x^2},\sqrt{1-x^2}\rangle}(y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1\,\mathrm{d}y = [y]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} = 2\sqrt{1-x^2}.$$

Položíme-li tedy $F(x) = \int_{M_2}\chi_M(x,y)\,\mathrm{d}y = 2\sqrt{1-x^2}$, jsou splněny předpoklady Věty 11(i) a platí

$$\int_M f = \int_{M_1\times M_2}\chi_M = \int_{M_1} F(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = 2\left[\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi.$$